και $\lim_{n\to\infty} m_{\frac{X_n}{n}}(t) = \frac{1}{e^{-\beta t}} = e^{\beta t} \Rightarrow \frac{X_n}{n} \xrightarrow{d} X$ με $P(X=\beta)=1$
$P(X\neq\beta)=0$

$m_X(t) = E(e^{tX}) = e^{t\beta}$

(Β) τρόπος: $E(X_n) = \beta\cdot n$ και $E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \beta\left(\frac{n}{n}\right) = \beta$

$\boxed{\begin{array}{l} X\sim G(a,\beta) \\ E(X)=a\beta \\ Var(X)=a\beta^2 \end{array}}$

$Var(X_n) = n\cdot\beta^2 \to Var\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{n\beta^2}{n^2} = \frac{\beta^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} \beta$ ή

$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{d} \beta$

Μάθημα 10ο

16/12/15

Τυχαία Δείγματα - Στατιστικά - Δειγματικές κατανομές

Η από κοινού κατανομή ενός τυχαίου δείγματος $X_1, \dots, X_n$ είναι:
$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n)$ ή $P_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = P_{X_1}(x_1)\cdots P_{X_n}(x_n)$

Διδιάστατο δείγμα (X,Y): Δειγματική συνδιακύμανση, $S_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$

$S_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$

Δειγματικός πίνακας διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων, $S = \begin{pmatrix} S_X^2 & S_{XY} \\ S_{YX} & S_Y^2 \end{pmatrix}$

Ροπές ενός κ-διάστατου δείγματος

Έστω $\underset{\sim}{X_1} = (X_{11},\dots,X_{k1})', \dots, \underset{\sim}{X_n} = (X_{1n},\dots,X_{kn})'$ ένα κ-διάστατο δείγμα

i) Δειγματική ροπή $(r_1,\dots,r_k)$ περί το μηδέν, $m_{r_1\dots r_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{1i}^{r_1}\cdots X_{ki}^{r_k}$

ii) Δειγματική κεντρική ροπή $(r_1\dots r_k)$ τάξης, $V_{r_1\dots r_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\bar{X}_1)^{r_1}\cdots(X_{ki}-\bar{X}_k)^{r_k}$

iii) Δειγματική τυπική ροπή $(r_1\dots r_k)$ τάξης, $a_{r_1\dots r_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_{1i}-\bar{X}_1}{S_1}\right)^{r_1}\cdots\left(\frac{X_{ki}-\bar{X}_k}{S_k}\right)^{r_k}$

Στατιστικά - Δειγματικές κατανομές

Στατιστικό ή στατιστική συνάρτηση είναι μια συνάρτηση των $X_1, \dots, X_n$ ενός τυχαίου δείγματος που δεν περιέχει άγνωστες παραμέτρους π.χ. $\bar{X}, S'^2, \bar{X}, S$

Διατεταγμένο στατιστικό r τάξης, $1 \le r \le n$ του δείγματος λέγεται η τ.μ. $X_{(r)}$, όπου $X_{(r)}$ είναι η r^{th} μικρότερη μέτρηση από τις $X_1, \dots, X_n$
Διατεταγμένο στατιστικό ενός δείγματος λέγεται η n-διάστατη τ.μ. $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από πληθυσμό X με $E(X) = \mu$ κ' $Var(X) = \sigma^2$.
Τότε: $E(\bar{X}) = \mu$, $Var(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$, $E(S^2) = \sigma^2$, $Var(S^2) = \dfrac{1}{n}\left(\lambda_4 - \dfrac{n-3}{n-1}\sigma^4\right)$

$\lambda_4 = E(X-\mu)^4$ (Ασκ. 6.9(b)).

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$ τ.δ. από πληθυσμό (μ_1, σ_1^2) και $X_{21}, \dots, X_{2n_2}$ τ.δ. από άλλο ανεξάρτητο πληθυσμό (μ_2, σ_2^2).
Τότε: $E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$, $Var(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με $E(X) = \mu$ και $Var(X) = \sigma^2$
Η στατιστική συνάρτηση $\bar{X}$ και η σ.σ. $X_i - \bar{X}$ είναι ασυσχέτιστες τ.μ., δηλ.
$Cov(\bar{X}, X_i - \bar{X}) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $U = \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda X_\lambda$; $V = \sum_{\mu=1}^{n} b_\mu X_\mu$.

$$Cov(U,V) = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_\lambda b_\mu Cov(X_\lambda, X_\mu).$$

$$\bar{X} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda X_\lambda, \quad a_\lambda = \frac{1}{n}$$

$$X_i - \bar{X} = \sum_{\mu=1}^{n} b_\mu X_\mu, \quad b_\mu = 1 - \frac{1}{n}, \ \mu = i$$

$\Downarrow$

$$X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \qquad = -\frac{1}{n}, \ \mu \ne i$$

$$Cov(\bar{X}, X_i - \bar{X}) = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_\lambda b_\mu Cov(X_\lambda, X_\mu) =$$

λόγω ανεξ.
$Cov(X_i, X_j) = 0, \quad i \neq j$
$Cov(X_i, X_i) = Var(X_i) = \sigma^2 \quad i=j$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda b_\lambda Cov(X_\lambda, X_\lambda) = \quad \Big(\overbrace{\frac{n-1}{n} - \frac{n-1}{n}}^{0}\Big)$$

$$= \sigma^2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda b_\lambda = \sigma^2 \cdot \frac{1}{n}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right) + (n-1)\left(-\frac{1}{n}\right)\right] = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4: Εστω $X_1, \dots, X_v$, v ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με κατανομή $N(0,1)$. Η κατανομή της τ.μ. $U = X_1^2 + \dots + X_v^2$ λέγεται X_v^2 και συμβολικά $X_v^2 \equiv \sum_{i=1}^{v} N^2(0,1)$.

▶ $X_v^2 \equiv G(a = \frac{v}{2}, b = 2)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$U = \sum_{i=1} X_i^2$, $X_1, \dots, X_v$ ανεξ. $N(0,1)$ τ.μ. $(X \sim N(0,1))$

$m_G(t) = (1-bt)^{-a}$

$$m_U(t) = m_{\sum_{i=1}^{v} X_i^2}(t) = \prod_{i=1}^{v} m_{X_i^2}(t) = \left[m_{X^2}(t)\right]^v = ⊛$$

$X \sim N(0,1) \Rightarrow X^2 \sim X_1^2$

$x\sqrt{1-2t} = y$

$$m_{X^2}(t) = E(e^{tX^2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} dx = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$= (1-2t)^{1-\frac{1}{2}} \equiv G(a = \tfrac{1}{2}, b = 2) \equiv X_1^2$$

$$⊛ = \left[(1-2t)^{-\frac{1}{2}}\right]^v = (1-2t)^{-\frac{v}{2}} \equiv G\left(a = \tfrac{v}{2}, b = 2\right) \equiv X_v^2$$

Κατανομή t

Εστω $X \sim N(0,1)$, $Y \sim X_v^2$, και X, Y ανεξ. τ.μ. Η τ.μ. $T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/v}} \sim t_v$ και

$$t_v \equiv \frac{N(0,1)}{\sqrt{X_v^2/v}}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5: $t_v \sim f(t) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{v\pi}} \dfrac{1}{\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}}}, \quad -\infty < t < +\infty$

$$t=\frac{X}{\sqrt{Y/v}},\quad w=y \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} x=\frac{t\sqrt{w}}{\sqrt{v}} \\ y=w \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow |J|=\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{v}} & \cdot \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{v}}$$

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}e^{-\frac{x^2}{2}}y^{\frac{v}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}},\quad -\infty<x<\infty,\ y>0$$

$-\infty<t<+\infty$

αμφιμ

$$f_{T,W}(t,w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}w^{\frac{v}{2}-1}\cdot e^{-\frac{t^2w}{2v}-\frac{w}{2}}\cdot\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{v}}=\frac{1}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)2^{\frac{v+1}{2}}}w^{\frac{v+1}{2}-1}e^{-\left(1+\frac{t^2}{v}\right)\frac{w}{2}}$$

$$f_T(t)=\frac{1}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)2^{\left(\frac{v+1}{2}\right)}}\int_0^\infty w^{\frac{v+1}{2}-1}e^{-\left(1+\frac{t^2}{v}\right)\frac{w}{2}}dw=\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)2^{\left(\frac{v+1}{2}\right)}}\left[\frac{2}{\left(1+\frac{t^2}{v}\right)}\right]^{\frac{v+1}{2}}$$

Κατανομή F

Εστω $X_1\sim\chi_1^2$, $X_2\sim\chi_2^2$ και X_1,X_2 ανεξ. τ.μ. $F=\frac{X_1/v_1}{X_2/v_2}$ λέγεται F_{v_1,v_2} και $F_{v_1,v_2}=\frac{\chi_{v_1}^2/v_1}{\chi_{v_2}^2/v_2}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6: $F_{v_1,v_2}\sim f(u)=\frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}}\frac{u^{\frac{v_1-2}{2}}}{\left(1+\frac{v_1u}{v_2}\right)^{\frac{v_1+v_2}{2}}},\quad u>0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\begin{matrix} u=\frac{X_1/v_1}{X_2/v_2} \\ w=X_2 \end{matrix}\Bigg\}\Rightarrow\begin{matrix} x_1=\frac{v_1uw}{v_2} \\ X_2=w\end{matrix}\Bigg\}\Rightarrow |J|=\begin{vmatrix}\frac{v_1w}{v} & \cdot \\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{v_1w}{v_2}\neq 0$

$X_1,X_2>0$ και ανεξ.
$u,w>0$

$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)2^{v_1+v_2}}x_1^{\frac{v_1}{2}-1}x_2^{\frac{v_2}{2}-1}e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}$$

$$\rightsquigarrow f(u,w)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)2^{\frac{v_1+v_2}{2}}}\left(\frac{v_1uw}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}-1}w^{\frac{v_2}{2}-1}e^{-\left[\frac{v_1uw}{v_2}+w\right]/2}\,\frac{v_1w}{v_2}=$$

=

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)2^{\frac{v_1+v_2}{2}}}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}} \underbrace{w^{\frac{v_1+v_2}{2}-1} e^{-\left[\frac{v_1 u w}{v_2}+w\right]/2}}_{\int_0^\infty dw \Rightarrow \beta^a\Gamma(a) \text{ οπου } a=\frac{v_1+v_2}{2},\ \beta=\frac{2}{\frac{v_1}{v_2}u+1}}$$

$$\rightsquigarrow f(w) = \frac{u^{\frac{v_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)\cancel{2^{\frac{v_1+v_2}{2}}}}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}}\left(\frac{2}{\frac{v_1 u}{v_2}+1}\right)^{\frac{v_1+v_2}{2}}\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)$$

Δειγματοληψία από κανονικούς πληθυσμούς

① Εάν $X_1,\dots,X_n$ τ.δ. απο $N(\mu,\sigma^2)$. Τότε $\bar{X}$ ανεξ. απο $X_i-\bar{X}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Επειδή $Cov(\bar{X}, X_i-\bar{X})=0$, $i=1,\dots,n$ και κανονικές τ.μ. άρα ανεξ οι τ.μ. $\bar{X}$ και $X_i-\bar{X}$.

② Εστω $X_1,\dots,X_n$ τ.δ. από $N(\mu,\sigma^2)$. Τότε:

α) $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$, β) $\bar{X}$ και S^2 ανεξ. τ.μ., γ) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim X^2_{n-1}$

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

α) $m_{\bar{X}}(t) = m_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}(t) = m_{\sum X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = e^{n\mu\frac{t}{n}+\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{t}{n}\right)^2 n} = e^{\mu t+\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}t^2} \equiv N(\mu,\sigma^2/n)$

- $m_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = e^{n\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 n}$

γ) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{\sum[(X_i-\mu)+(\mu-\bar{X})]^2}{\sigma^2}$

$$\to \underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}_{V} = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{\sigma^2}}_{U} - \underbrace{\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}}_{W} \rightsquigarrow U=V+W \circledast, \quad V,W \text{ ανεξ. τ.μ.}$$

$X_i\sim N(\mu,\sigma^2) \to \frac{X_i-\mu}{\sigma^2}\sim N(0,1) \to \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma^2}\right)^2 \sim X^2_n$ (U)

$\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right) \to \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1) \to \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\sim X^2_1$

$\circledast$ $m_U(t) = m_V(t) \cdot m_W(t) \Rightarrow m_V(t) = \dfrac{m_U(t)}{m_W(t)} = \dfrac{(1-2t)^{-\frac{n}{2}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}} = (1-2t)^{-\frac{n-1}{2}} \equiv \chi^2_{n-1}$

③ $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$, τότε η σ.σ. $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$(t=)\ \frac{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \left(\sim N(0,1)\right)}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\left(\sim \chi^2_{n-1}\right) \Big/ (n-1)}} \sim t_{n-1}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω $(\bar{X}_1, S_1^2)$ και $(\bar{X}_2, S_2^2)$ μέσες τιμές και διακυμάνσεις δύο τ.δ. μεγέθους n_1 και n_2 από δύο ανεξ. κανον. πληθ. με μέσες τιμές μ_1, μ_2 και κοινή διακύμανση σ^2 $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2)$. Τότε η σ.σ.:

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}, \quad S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)$$

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1-1} \text{ και } \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_2-1} \rightarrow \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n_1+n_2-2}.$$

④ Έστω S_1^2 και S_2^2 οι διακυμάνσεις δύο τ.δ. μεγεθών n_1 και n_2 από δύο ανεξ. πληθ., $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Τότε: $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n_1-1}$ και $\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n_2-1} \rightarrow$

$$\frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \Big/ (n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \Big/ (n_2-1)} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Craig: Έστω $\underset{\sim}{X} \sim N_{\kappa\text{-διάστατη}}(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma_x)$, $|\Sigma_x| \neq 0$

Τότε, $(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})' \Sigma_x^{-1} (\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu}) \sim \chi^2_{\kappa}$